| | |
|---|---|
| Title | 既約複素シンプレクティック多様体に対する大域トレリ問題の反例 |
| Author(s) | 並河, 良典 |
| Citation | 代数幾何学シンポジューム記録 (2001), 2001: 138-153 |
| Issue Date | 2001 |
| URL | http://hdl.handle.net/2433/214744 |
| Right | |
| Type | Departmental Bulletin Paper |
| Textversion | publisher |

# 既約複素シンプレクティック多様体に対する大域トレリ問題の反例

並河良典

単連結なコンパクトケーラー多様体 $X$ は、次の性質をもつとき既約複素シンプレクティック多様体とよばれる。

$X$ 上に至る所非退化な正則2型式 $\Omega$ が存在して、$H^0(X, \Omega^2_X) = \mathbb{C}[\Omega]$.

定義から $X$ の(複素)次元は偶数である。

正則2型式 $\Omega$ を

$$\int_X (\Omega\bar{\Omega})^{l} = 1 \quad , \quad 2l = \dim X$$

となるように正規化しておき、$H^2(X, \mathbb{R})$ 上の対称2次型式 $q_X$ を

$$q_X(\alpha) := \frac{l}{2}\int_X (\Omega\bar{\Omega})^{l-1}\alpha^2 + (1-l)\int_X \Omega^{l}\bar{\Omega}^{l-1}\alpha \int_X \Omega^{l-1}\bar{\Omega}^{l}\alpha$$

によって定義する。正の実数 $c$ を適当にとると、$cq_X$ は、$H^2(X, \mathbb{Z})$ 上の($\mathbb{Z}$ に値をもつ)対称2次型式を定めることがわかる。このような $c$ の中で最小のものを $c_0$ としたとき

$$Q_X := c_0 q_X$$

と置く。

$Q_X$ を Beauville-Bogomolov 型式とよぶ.
一方, $X$ はケーラー多様体なので, $H^2(X,\mathbb{Z})$ には,
重さ2のホッジ構造が入る.
もし, 既約複素シンプレクティック多様体 $X$, $Y$ が
互いに双有理同値ならば, 自然な同型射

$$H^2(X,\mathbb{Z}) \simeq H^2(Y,\mathbb{Z})$$

が存在し, $Q_X$, $Q_Y$ に関して isometry になる. さらに
この同型射は両辺のホッジ構造を保つ.

Debarre [De] は, 双有理同値ではあるが, 同型で
はないような2つの既約複素シンプレクティック多様体
$X$, $Y$ を構成した. したがって, 次の問題に対する
反例を与える:

<u>双正則トレリ問題</u>: $X$, $Y$ を同じ次元の既約
複素シンプレクティック多様体で, ホッジ isometry

$$\phi : (H^2(X,\mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y,\mathbb{Z}), Q_Y)$$

が存在したと仮定する. このとき $X$ と $Y$ は同型か?

$\dim X = 2$ の場合は, 周知のように, 上の問題は
肯定的である. (K3 曲面に対するトレリ定理)
Debarre の構成した例は4次元である.

Debarre の反例により. トレリ型問題で期待される最善の形は. 次の2つである.

<u>双有理トレリ問題</u> : $X$, $Y$ を同じ次元の既約複素シンプレクティック多様体でホッジ isometry

$$\phi : (H^2(X,\mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y,\mathbb{Z}), Q_Y)$$

が存在したと仮定する. このとき $X$ と $Y$ は双有理同値か?

<u>偏極トレリ問題</u> :

$(X, L)$, $(Y, M)$ を偏極構造を持った既約複素シンプレクティック多様体とする. もし. ホッジ isometry

$$\phi : (H^2(X,\mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y,\mathbb{Z}), Q_Y)$$

で $\phi([L]) = [M]$ となるものが存在すれば. $(X, L)$ と $(Y, M)$ は偏極多様体として同型か?

dim 2 の場合. 2つの問題はやはり肯定的である. 小論では. 4次元の場合に上記のトレリ型問題に対する反例を与える. 高次元の場合にも同様の方法で反例が作れることを注意しておく.

(i) クンマー多様体.

$T$を2次元複素トーラス, $\mathrm{Hilb}^{n+1}(T)$を$T$上の$n+1$個の点をパラメータ付けするDouady空間とする. 自然な射(Hilbert-Chow射)

$$h: \mathrm{Hilb}^{n+1}(T) \longrightarrow \mathrm{Sym}^{n+1}(T)$$

が存在する. ここで, $\mathrm{Sym}^{n+1}(T)$は, $T$の$n+1$次対称積 $T^{n+1}/\mathfrak{S}_{n+1}$ を表わす.
$\mathrm{Sym}^{n+1}(T)$の点を$T$上の$n+1$個の点からなる0-サイクル $[P_1, \cdots, P_{n+1}]$とみなすと. $[P_1, \cdots, P_{n+1}]$を $P_1 + \cdots + P_{n+1} \in T$ に対応させることにより射

$$\alpha: \mathrm{Sym}^{n+1}(T) \longrightarrow T$$

が定義できる. $2n$次元クンマー多様体 $K^n(T)$とは, $(\alpha \circ h)^{-1}(0)$のことである. $\overline{K}^n(T) := \alpha^{-1}(0)$と置くと, 自然な双有理射

$$h_0: K^n(T) \longrightarrow \overline{K}^n(T)$$

が$h$により導かれる. $K^n(T)$は, 既約複素シンプレクティック多様体になる.
$n=1$のときは、よく知られたクンマー曲面に他ならない.
我々がここで用いるのは, $n=2$の場合である.

さて. $h_0 : K^2(T) \longrightarrow \overline{K}^2(T)$ の例外集合を $E$ と置く. $E$ から $\overline{K}^2(T)$ の特異点集合 $\Sigma$ に自然な全射がある. $\Sigma$ は. $T$ と同型で. 3 torsion point に対応する 81点 以外のところでは. $A_1$ − 型特異点になる. $E \longrightarrow \Sigma$ の一般ファイバーは $\mathbb{P}^1$ と同型である. $E$ は. $K^2(T)$ の既約因子であり. $E$ の特異点解消を $F$ とすると. $F \longrightarrow \Sigma$ は. $F$ のアルバネーゼ射に一致する. すなわち

$$T \simeq \mathrm{Alb}(F)$$

である.

(ii) Beauville−Bogomolov 型式

$n \geq 2$ とする. このとき 次のホッジ isometry が存在する

$$(H^2(K^n(T), \mathbb{Z}), Q) \simeq (H^2(T, \mathbb{Z}), \langle , \rangle) \oplus \mathbb{Z}\delta$$

但し. $\delta^2 = -2(n+1)$ であり. 右辺のホッジ構造は

$$H^{2,0} := H^{2,0}(T)$$
$$H^{1,1} := H^{1,1}(T) \oplus \mathbb{C}\delta$$
$$H^{0,2} := H^{0,2}(T)$$

で与えられる. この ホッジ isometry によって 既約例外因子 $E$ のクラス $[E]$ は. $2\delta$ に送られる.

$n=1$ の場合 $(H^2(K^1(T),\mathbb{Z}), \overset{\overset{Q}{\shortparallel}}{\langle\ ,\ \rangle})$ は、このように単純な直和分解を持たない。

(iii) 双対トーラス：

$T$ を複素トーラスで次元を2とする。$\hat{T}$ を $T$ の双対トーラスとする。Poincaré 双対と、$\hat{T}$ が $T$ の双対であることから射。

$$\alpha_T : H^2(T,\mathbb{Z}) \simeq H_2(T,\mathbb{Z}) = H^2(\hat{T},\mathbb{Z})$$

を得る。$\alpha_T$ は、カップ積に関してホッジ isometry になる（塩田）。この観察が反例を構成するときの鍵になる。

(iv) 反例の構成：

$T$ をアーベル曲面で次の性質を持つものとする。

(a) $T$ は $\hat{T}$ と同型ではない

(b) Neron-Severi 群 $NS(T)$ は、豊富な直線束 $H$, $H^2=6$ で生成される

$$NS(T) = \mathbb{Z}\cdot H$$

$\hat{H} := \alpha_T(H)$ とおくと、$\hat{H} \in H^2(\hat{T},\mathbb{Z})$ はやはり豊富類（アンプル類）になる。

そこで整数 $m>0$ を十分大きくとり

$$L := mH - \delta$$
$$M := m\hat{H} - \hat{\delta}$$

が各々 $K^2(T)$, $K^2(\hat{T})$ 上の豊富な直線束になるようにする.

<u>命題</u>　$X := K^2(T)$, $Y := K^2(\hat{T})$ と置く

(1) ホッジ isometry $\phi : (H^2(X,\mathbb{Z}), Q_X) \xrightarrow{\sim} (H^2(Y,\mathbb{Z}), Q_Y)$ で $\phi(L) = M$ となるものが存在する

(2) $X$ と $Y$ は互いに双有理同値ではない.

証明. (1): (ii) より 2つの lattice

$$(H^2(T,\mathbb{Z}), \langle , \rangle) \oplus \mathbb{Z}\delta \quad と \quad (H^2(\hat{T},\mathbb{Z}), \langle , \rangle) \oplus \mathbb{Z}\hat{\delta}$$

の間にホッジ isometry を作ればよいが, $\phi := \alpha_T \oplus j$ (ただし $j : \mathbb{Z}\delta \longrightarrow \mathbb{Z}\hat{\delta}$, $j(\delta) = \hat{\delta}$) と置けば $\phi(L) = M$ も満たされる.

(2): もし双有理射 $f : Y \dashrightarrow X$ が存在すれば ホッジ isometry

$$f^* : (H^2(X,\mathbb{Z}), Q_X) \xrightarrow{\sim} (H^2(Y,\mathbb{Z}), Q_Y)$$

がある.

特に $f^*$ は, Neron-Severi 群の間の射

$$NS(X) \xrightarrow{\sim} NS(Y)$$

をひきおこす. 仮定 (b) より $NS(X) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}\delta$, $NS(Y) = \mathbb{Z}\cdot\hat{H} \oplus \mathbb{Z}\hat{\delta}$ である.

$f^*$ が isometry であることと, $H^2 = 6$, $\hat{H}^2 = 6$, $\delta^2 = -6$ $\hat{\delta}^2 = -6$ を用いると

$$f^*(H) = \begin{cases} \hat{H} & \text{or} \\ -\hat{H} \end{cases}$$

$$f^*(\delta) = \begin{cases} \delta & \text{or} \\ -\hat{\delta} \end{cases}$$

がわかる.

$X$, $Y$ がケーラー多様体であることから, $f^*(H) = \hat{H}$, $f^*(\delta) = \hat{\delta}$ であることがわかる. 特に $[E] = 2\delta$, $[\hat{E}] = 2\hat{\delta}$ なので, $f^*([E]) = [\hat{E}]$.

$h^0(X, \mathcal{O}_X(E)) = h^0(Y, \mathcal{O}_Y(\hat{E})) = 1$ なので双有理射 $f$ は, $\hat{E}$ から $E$ への双有理射を導く.

$E$, $\hat{E}$ の特異点解消を各々 $F$, $\hat{F}$ と置くと,

$F$ と $\hat{F}$ は双有理同値となり, 両者のアルバネーゼ多様体は同型: $Alb(F) \simeq Alb(\hat{F})$.

ところが (i)において $\mathrm{Alb}(F) \simeq T$, $\mathrm{Alb}(\hat{F}) \simeq \hat{T}$ であったから. $T \simeq \hat{T}$ となり 仮定 (a)に矛盾する. □

注意1

$T$を.アーベル曲面で次の性質を持つものとする.

(a) $T$は$\hat{T}$と同型でない

(b) $NS(T) = \mathbb{Z} \cdot H$, $H^2 = 4$.

このとき. フーリエ・向井変換を用いて 同型射

$$\phi : K^2(\hat{T}) \xrightarrow{\sim} K^2(T)$$

を作ることができる. $\left( \phi^*(H) = 5\hat{H} - 4\hat{\delta}, \right.$ $\left. \phi^*(\delta) = 6\hat{H} - 5\hat{\delta} \right)$ したがって 反例を構成するとき $H^2$として何をとるかは 重要になる.

注意2

$T$をアーベル曲面, $\hat{T}$をTの双対アーベル曲面とする. $X := K^2(T)$, $Y := K^2(\hat{T})$と置く. $D(X)$を $X$上の 連接層の bounded derived category, $D(Y)$を $Y$上のそれとする.

$$N := \{ (x, y, z) \in T \times T \times T \mid x + y + z = 0 \}$$

と置くと. $N$には 対称群$\mathfrak{S}_3$が 置換によって作用する. $G = \mathfrak{S}_3$に対して. $G\text{-}\mathrm{Hilb}(N) :=$

$$\left\{ Z \subset N \;\middle|\; \begin{array}{l} Z \text{ は } N \text{ の } G\text{-不変 } 0 \text{ 次元部分概型} \\ \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \text{ は } G\text{-正則表現} \end{array} \right\}$$

と定義する.

$G$-Hilb$(N)$ の free-orbit を含む既約成分は $X$ に一致する (Haiman). 図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr] & & N \arrow[dl] \\ & N/G & \end{tikzcd}$$

に Bridgeland, King, Reid の定理を適用すると圏同値

$$D(X) \simeq D^G(N)$$

の存在がわかる. 但し, $D^G(N)$ は, $G$-連接層の bounded derived category である. 同様にして圏同値

$$D(Y) \simeq D^G(\hat{N}),$$

$\hat{N} := \{(x,y,z) \in \hat{T} \times \hat{T} \times \hat{T} \mid x+y+z=0\}$ も得る.

$\hat{N}$ は, $N$ の双対アーベル多様体なので, フーリエ・向井変換 ($G$-equivariant 版) により圏同値

$$D^G(N) \simeq D^G(\hat{N})$$

が存在する. したがって $D(X)$ と $D(Y)$ は圏同値である.

他に知られている既約複素シンプレクティック多様体として、K3曲面 $S$ 上の $n$ 点をパラメータ付けする Douady 空間 $\mathrm{Hilb}^n(S)$ がある。
こちらの系列の多様体に対しては、双有理トレリ，偏極トレリともに反例は知られていない。
ここでは、これらの予想を支持する例を紹介する。

<u>例</u> (Beauville–Donagi, Voisin)

$V \subset \mathbb{P}^5$ を非特異3次超曲面とする。

$F := F(V) = \{ \ell \subset V \mid \ell$ は $V$ に含まれる直線 $\}$

のことを $V$ のファノ概型とよぶ。
$F$ は、$\mathrm{Hilb}^2(S)$ ($S$ : K3曲面) と変形同値な既約複素シンプレクティック多様体になる。

$P := \{ ([\ell], v) \in F \times V \mid v \in \ell \}$ を $F$ の上の普遍族とする：

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & V \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

$\alpha := p_* q^* : H^4(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(F, \mathbb{Z})$ をアーベル・ヤコビ写像とよぶ。

$h \in H^2(V,\mathbb{Z})$ を超平面切断類，
$g \in H^2(F,\mathbb{Z})$ を埋め込み

$$F \hookrightarrow Gr(2,6) \underset{\substack{\text{Plücker}\\\text{埋め込み}}}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^{14}$$

に対する超平面切断類とする．$\alpha(h^2) = g$ である．

$$H^4(V,\mathbb{Z})_0 := \{ x \in H^4(V,\mathbb{Z}) \mid x \cdot h = 0 \}$$
$$H^2(F,\mathbb{Z})_0 := \{ x \in H^2(F,\mathbb{Z}) \mid x \cdot g^3 = 0 \}$$

とおくと．$\alpha$ は．$(-1,-1)$ 型のホッジ同型射で

$$\alpha_0 : H^4(V,\mathbb{Z})_0 \xrightarrow{\sim} H^2(F,\mathbb{Z})_0$$

を導き、次の性質をもつ．

① $\alpha_0$ は $(-1,-1)$ 型のホッジ同型射

② $F$ の Beauville–Bogomolov 型式 $Q_F$ に対して

$$Q_F(\alpha_0(x), \alpha_0(y)) = -x \cdot y$$
$$x, y \in H^4(V,\mathbb{Z})_0$$

非特異3次超曲面に対しては次の定理が知られている．

<u>定理</u>：$V, V'$ を $\mathbb{P}^5$ の中の非特異3次超曲面として．
ホッジ isometry $\phi : (H^4(V,\mathbb{Z})\ \text{cup積}) \simeq (H^4(V',\mathbb{Z})\ \text{cup積})$
で $\phi(h^2) = h'^2$ となるものが存在すると仮定する．

このとき $(V, \mathcal{O}_V(1))$ と $(V', \mathcal{O}_{V'}(1))$ は偏極多様体として同型である。ここで $\mathcal{O}_V(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_V$, $\mathcal{O}_{V'}(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_{V'}$ である。

系

$(F, g)$, $(F', g')$ を $\mathbb{P}^5$ の3次超曲面に対するファノ概型と、その上の $G(2,6) \hookrightarrow \mathbb{P}^{14}$ によって決まる偏極構造とする。ホッジ isometry

$$\phi : (H^2(F, \mathbb{Z}), Q_F) \xrightarrow{\sim} (H^2(F', \mathbb{Z}), Q_{F'})$$

で $\phi(g) = g'$ となるものが存在すれば、$(F, g)$ と $(F', g')$ は偏極多様体として同型である。

証明: $\alpha$ により $\phi$ は、ホッジ同型

$$\varphi : H^4(V, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^4(V', \mathbb{Z})$$

を定める。ただし $F = F(V)$, $F' = F(V')$ とする。

$\varphi$ が isometry であることをみるには、$\varphi_{\mathbb{Q}} : H^4(V, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^4(V', \mathbb{Q})$ が isometry であることをみればよい。

$H^4(V, \mathbb{Q}) = H^4(V, \mathbb{Q})_0 \oplus_{\perp} \mathbb{Q}h^2$, $H^4(V', \mathbb{Q}) = H^4(V', \mathbb{Q})_0 \oplus_{\perp} \mathbb{Q}h'^2$ であることに注意する。

$H^2(F, \mathbb{Z})_0 = \{x \in H^2(F, \mathbb{Z}) \mid Q_F(g, x) = 0\}$, $H^2(F', \mathbb{Z})_0 = \{x \in H^2(F', \mathbb{Z}) \mid Q_{F'}(g', x) = 0\}$ であることがわかるので、

$\varphi_{\mathbb{Q}}(H^4(V, \mathbb{Q})_0) = H^4(V', \mathbb{Q})_0$, $\varphi_{\mathbb{Q}}(h^2) = h'^2$ がわかる。

ゆえに $\varphi_{\mathbb{Q}}$ は isometry, すなわち $\varphi$ は isometry.
したがって $(F(V), g) \simeq (F(V'), g')$ である. $\square$

現段階で. 一般の既約複素シンプレクティック多様体に対して意味があるのは. 次の問いであろう. (注意2を参照)

<u>問題</u>: $X$, $Y$ を同じ次元の既約複素シンプレクティック多様体で. ホッジ isometry

$$\phi : (H^2(X, \mathbb{Z}), Q_X) \simeq (H^2(Y, \mathbb{Z}), Q_Y)$$

が存在したと仮定する. このとき $D(X)$ と $D(Y)$ は圏同値になるか?

## 文献

[Be] Beauville, A.: Variétés Kähleriennes dont la premiére classe de Chern est nulle, J. Diff. Geom. <u>18</u>, 755–782 (1983)

[B-K-R] Bridgeland, T, King, A., Reid, M.: The McKay correspondence as an equivalence of derived categories, J. Amer. Math. Soc. <u>14</u> (3), 535–554 (2001)

[Be-Do] Beauville, A., Donagi, R.: The variety of lines of a cubic fourfold, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1, 301, 703-706 (1985)

[De] Debarre,: Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser 1, 299, 681-684 (1984)

[Ha] Haiman, M.: Hilbert schemes, polygraphs and MacDonald positivity conjecture, J. Amer. Math. Soc. 14 (4), 941-1006 (2001)

[Huy] Huybrechts, D.: Compact hyper-Kähler manifolds: basic results, Invent. Math. 135, 63-113 (1999)

[Mu] Mukai, S.: Moduli of vector bundles on K3 surfaces, and symplectic manifolds, Sugaku Exposition 1, 139-174 (1988)

[Yo] Yoshioka, K.: Moduli spaces of stable sheaves on Abelian surfaces, math AG/0009001

[Vo] Voisin, C. : Théorème de Torelli pour les cubiques de $\mathbb{P}^5$, Invent. Math. <u>86</u> 577–601 (1986)

[Na] Namikawa, Y. : Counter-example to global Torelli problem for irreducible symplectic manifolds, preprint

[Sh] Shioda, T. : The period map of abelian surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. <u>25</u>, 47–59 (1978)